Dérivées d'une fonction du type u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$

Soit I un intervalle et u une fonction dérivable sur I telle que pour tout réel x de I on ait $u(x) \neq 0$.

Pour tout entier relatif non nul n, notons h_n la fonction définie sur I par $\boxed{h_n(x) = (u(x))^n}$.

Dans un premier temps démontrons par **récurrence** que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est dérivable sur I et que pour tout réel x de I on a : $\boxed{h'_n(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}}$

- On a $h_1(x) = u(x)$ donc $h'_1(x) = u'(x) = 1 \times u'(x) \times (u(x))^{1-1}$, donc $\boxed{\text{la proposition est vraie au rang 1}}$.
- Soit m un entier naturel non nul.
  Si la proposition est vraie au rang m , h_m est dérivable sur I et pour tout réel x de I on a :
  $h'_m(x) = m \times u'(x) \times (u(x))^{m-1}$. Or $h_{m+1}(x) = (u(x))^{m+1} = (u(x))^m \times u(x)$ donc

  $$\boxed{h_{m+1}(x) = h_m(x) \times u(x)}$$

  ainsi h_{m+1}, produit de deux fonctions dérivables sur I, est dérivable sur I et pour tout réel x de I on a:

  $$h'_{m+1}(x) = h'_m(x) \times u(x) + h_m(x) \times u'(x)$$
  $$h'_{m+1}(x) = m \times u'(x) \times (u(x))^{m-1} \times u(x) + (u(x))^m \times u'(x)$$
  $$h'_{m+1}(x) = m \times u'(x) \times (u(x))^m + (u(x))^m \times u'(x)$$

  donc : $\boxed{h'_{m+1}(x) = (m+1) \times u'(x) \times (u(x))^{(m+1)-1}}$ et la proposition est vraie au rang $m+1$.
- La proposition est vraie au rang 1 et pour tout entier naturel m non nul , elle est vraie au rang $m+1$ dès lors qu'elle est vraie au rang m, donc d'après le théorème de récurrence,

$\boxed{\text{Pour tout } \textbf{naturel } n \text{ non nul } h_n \text{ est dérivable sur I et pour tout réel } x \text{ de I: } h'_n(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}}$ (1)

Si n est un **entier relatif négatif** non nul, alors $h_n(x) = (u(x))^n = \left((u(x))^{-1}\right)^{-n}$

Posons $v(x) = (u(x))^{-1} = \dfrac{1}{u(x)}$, on a alors:

$$\boxed{h_n(x) = (v(x))^{-n} \text{ où } -n \text{ est un entier naturel non nul et } v'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}}$$

En remplaçant u par v et n par $-n$ dans (1) on en déduit que la fonction h_n est dérivable sur I et que:

$$h'_n(x) = -n \times v'(x) \times (v(x))^{-n-1}$$
$$\text{Soit } h'_n(x) = -n \times \left(-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}\right) \times \left((u(x))^{-1}\right)^{-n-1}$$
$$h'_n(x) = n \times \frac{u'(x)}{(u(x))^2} \times (u(x))^{n+1}$$
$$\boxed{h'_n(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}}$$

Conclusion:

Si une fonction u est dérivable et non nulle sur un intervalle I, pour tout entier relatif non nul n,
la fonction h définie par $h(x) = (u(x))^n$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I on a :

$$h'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$$

Remarque: Si $n > 0$ la formule est encore valable même si la fonction u s'annule pour certaines valeurs de I.