Dérivées d'une fonction du type $\sqrt{u}$

On rappelle que si une fonction f est dérivable en a , le nombre dérivé de f en a est le nombre $f'(a)$ tel que:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)}\ (1)$$

Soit I un intervalle et u une fonction dérivable sur I telle que pour tout réel x on ait $u(x)>0$.

Notons h la fonction définie sur I par $\boxed{h(x)=\sqrt{u(x)}}$.

Si $x\in$I, puisque u est dérivable en x, d'après (1) on a : $\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)}$ (2)

Si $h\neq 0$ et si $x+h\in$I on a :

$$\frac{h(x+h)-h(x)}{h}=\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}=\frac{\left(\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}\right)\left(\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}\right)}{h}\times\frac{1}{\left(\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}\right)}$$

Ainsi : $$\boxed{\frac{h(x+h)-h(x)}{h}=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}}\ (3)$$

Or la fonction u est continue en x et la fonction $X\longmapsto\frac{1}{\sqrt{X}+\sqrt{u(x)}}$ est continue en $u(x)$ donc :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{h\to 0}u(x+h)=u(x)\\ \displaystyle\lim_{X\to u(x)}\frac{1}{\sqrt{X}+\sqrt{u(x)}}=\frac{1}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\end{array}\right\}\overset{\text{Limite d'une fonction composée}}{\Longrightarrow}\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}}(4)$$

D'après (3), (2) et (4) on en déduit :

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}=u'(x)\times\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$$

Conclusion: Si une fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction h définie par $h(x)=\sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I on a : $h'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$