Dérivées des fonctions $x \longmapsto \sin(ax+b)$ et $x \longmapsto \cos(ax+b)$.

x étant un réel quelconque et $a \neq 0$, étudions les limites des rapports
$\dfrac{\sin(a(x+h)+b)-\sin(ax+b)}{h}$ et $\dfrac{\cos(a(x+h)+b)-\cos(ax+b)}{h}$
lorsque h tend vers 0.

1. $$\frac{\sin(a(x+h)+b)-\sin(ax+b)}{h} = \frac{\sin(ax+b+ah)-\sin(ax+b)}{h}$$

$$\frac{\sin(a(x+h)+b)-\sin(ax+b)}{h} = a \times \frac{\sin(ax+b+ah)-\sin(ax+b)}{ah}$$

$\lim\limits_{h\to 0} ah = 0$, et la fonction sinus est dérivable en $ax+b$ donc

$$\lim_{H\to 0} \frac{\sin(ax+b+H)-\sin(ax+b)}{H} = \sin'(ax+b) = \cos(ax+b)$$

ainsi $$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(ax+b+ah)-\sin(ax+b)}{ah} = \cos(ax+b)}$$

D'où $$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a(x+h)+b)-\sin(ax+b)}{h} = a \times \cos(ax+b)}$$

2. $$\frac{\cos(a(x+h)+b)-\cos(ax+b)}{h} = \frac{\cos(ax+b+ah)-\cos(ax+b)}{h}$$

$$\frac{\cos(a(x+h)+b)-\cos(ax+b)}{h} = a \times \frac{\cos(ax+b+ah)-\cos(ax+b)}{ah}$$

$\lim\limits_{h\to 0} ah = 0$, et la fonction cosinus est dérivable en $ax+b$ donc

$$\lim_{H\to 0} \frac{\cos(ax+b+H)-\cos(ax+b)}{H} = \cos'(ax+b) = -\sin(ax+b)$$

ainsi $$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(ax+b+ah)-\cos(ax+b)}{ah} = -\sin(ax+b)}$$

D'où $$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(a(x+h)+b)-\cos(ax+b)}{h} = a \times (-\sin(ax+b))}$$

3. Conclusions:

Si a et b sont deux réels quelconques, alors :
- la fonction $x \longmapsto \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \longmapsto a\cos(ax+b)$,
- la fonction $x \longmapsto \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \longmapsto -a\sin(ax+b)$.